Serie 7 – Parte I - Problema 8:
Determine la señal causal $x(n)$, si su Transformada Z está dada por:

b. $X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$

Calculemos los polos y ceros de $X(z)$. Se verifica:

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-z+\frac{1}{2}}$$

$$\text{polos:}\quad p_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-2}}{2}=\frac{1}{2}\pm j\frac{1}{2}$$

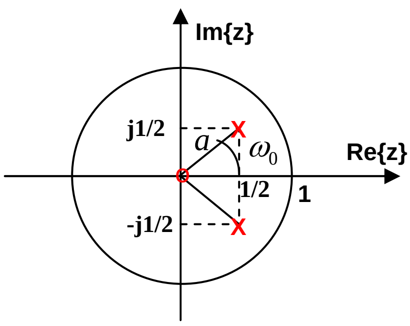
$$\text{ceros:}\quad c_{1,2}=0$$

Como la señal es causal, la RDC de $X(z)$ resulta: $\mathrm{RDC}\{X(z)\}=\left\{z\,/\,|z|>|p_{1,2}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Debido a que los polos son complejos conjugados, la señal $x(n)$ será una combinación de senos y cosenos amortiguados por una exponencial (ver filas 9 y 10 de la tabla de pares transformados Z). Igualamos entonces

$$1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}=1-2a\cos(\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\2a\cos(\omega_0)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\\omega_0=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$



Luego

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}+\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

que es de la forma:

$$X(z)=\frac{1-a\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2a\cos(\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}+\frac{a\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2a\cos(\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$$

$$\Rightarrow x(n)=a^n\cos(\omega_0 n)\mu(n)+a^n\sin(\omega_0 n)\mu(n)$$

$$\Rightarrow x(n)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\mu(n)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\mu(n)$$